* المعادلات التفاضلية الخطية :

- وهي معادلة فيها المتحول ومشتقاته من الدرجة الأولى وتكتب عادة على الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = Q(x) \quad \ldots \boxed{1}$$

وتكتب بشكل آخر :

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)\, x = f(y) \quad \ldots \boxed{2}$$

لحل المعادلة I نكتب للمعادلة بالشكل :

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{M_y - M_x}{N}\,dx}$$

ولنرد المعادلة إلى معادلة تامة نضرب بعامل التكميل :

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot p(x) \cdot y\,dx + e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)\,.dx$$

نكامل الطرفين :

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)\,dx} \cdot Q(x)\,dx$$

أي :

$$I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot Q(x) \cdot dx$$

وهو الحل العام للمعادلة (I)

وبطريقة مشابهة يمكن استنتاج حل المعادلة (II) :

$I(y)\,x = \int I(y)\cdot Q(y)\cdot dy$ ، $I(y) = e^{\int x(y)\cdot dy}$

(مثال) حل المعادلة $x\cdot\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

الحل: بالتقسيم على x نجد : $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2$ معادلة تفاضلية خطية.

ط $P(x) = \frac{2}{x}$ ، $Q(x) = x^2$

$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{2\int\frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$

$I(x)\cdot y = \int I(x)\cdot Q(x)\,dx$

$x^2\cdot y = \int x^2\cdot x^2\cdot dx$

$x^2\cdot y = \frac{1}{5}x^5 + c \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{c}{x^2}$

(مثال) أوجد الحل العام للمعادلة $(y+y^2)\,dx - (y^2 + 2xy + x)\,dy$

ثم أوجد الحل الخاص الموافق للشروط عندما $x=3$ فإن $y=1$

الحل:

$M = y + y^2 \Rightarrow \frac{dM}{dy} = 2y+1$

$N = y^2 + 2xy + x \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 2y+1$

$\Rightarrow \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

وهي خطية لماذا؟؟!!

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + 2xy + x}{y + y^2} = \frac{y^2}{y+y^2} + \frac{2y+1}{y+y^2} \cdot x$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2y+1}{y+y^2}\, x = \frac{y}{1+y} \quad , \quad \frac{dx}{dy} + \alpha(y)\, x = \beta(y)$$

$$\alpha(y) = \frac{-2y+1}{y+y^2} \quad , \quad \beta(y) = \frac{y^2}{1+y}$$

$$I(y) = e^{-\int \frac{2y+1}{y^2+y} dy} = e^{-\ln(y+y^2)} = e^{\ln \frac{1}{y^2+y}} = \frac{1}{y^2+y}$$

$$I(y) \cdot x = \int I(y) \cdot \beta(y) \cdot dy$$

$$\frac{1}{y+y^2} \cdot x = \int \frac{1}{y^2+y} \cdot \frac{y}{1+y}\, dy = \int \frac{dy}{(1+y)^2} = \frac{-1}{1+y} + c$$

$x = -y + c(y + y^2)$ وهو الحل العام.

ولتحديد الحل الخاص نوجد قيمة (c) بالتعويض :

$3 = -1 + c(1+1) \Rightarrow c = 2$.

$$\boxed{x = -y + 2(y + y^2)}$$ وهو الحل الخاص

ملاحظة :

عند حل معادلة خطية وتعيين عامل التكميل I يجب أن تأخذ المعادلة نفس الشكل المألوف بمعنى أن أمثال $\frac{dy}{dx}$ أو أمثال $\frac{dx}{dy}$ هي الواحد.

(مثال) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{y^2}{1-3xy}$

الحل:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y}x$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y)$$

$$I(y) = e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{\ln y^3} = y^3$$

$$I(y)x = \int I(y) + \beta(y)\, dy \Rightarrow y^3 . x = \int y^3 . \frac{1}{y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + c \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}}$$ وهو الحل العام

(مثال) أوجد حل المعادلة التفاضلية (وظيفة) $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{2}{y}x = 4y + 3$

(*) معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية:

[1] معادلة برنولي (هامة ترد غالباً في كل امتحان ☺)

وهي معادلة من الشكل: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x).y^n \quad ; \quad y \neq 0,1$

وهذه المعادلة تُرَدّ إلى معادلة خطية باتباع الخطوات التالية:

① نقسم الطرفين على y^n:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x).y^{-n+1} = Q(x)$$

② نفرض أن $z = y^{-n+1}$ فيكون:

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

③ نضرب طرفي المعادلة ب $(-n+1)$ ونعوض عن y بدلالة z

$$\frac{dz}{dx} + \underbrace{(-n+1)\,P(x)}_{p(x)} \cdot z = \underbrace{(-n+1)\,Q(x)}_{q(x)}$$

④ نفرض أن $p(x) = (-n+1)\,P(x)$ ، $q(x) = (-n+1)\,Q(x)$

$$\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x)$$

حل المعادلة هو: $I(x) \cdot z = \int I(x) \cdot q(x) \cdot dx$

وبتبديل $z = y^{-n+1}$ فنحصل على الحل المطلوب:

$$I(x) \cdot y^{-n+1} = \int I(x) \cdot q(x)\, d(x) \quad , \quad I(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

مثال: حل المعادلة $dy + 2xy\,dx = x \cdot e^{-x^2} \cdot y^{3}\, dx$

الحل: يمكن أن نكتب المعادلة على الشكل: $\frac{dy}{dx} + 2xy = x \cdot e^{-x^2} \cdot y^{-3}$

وهي معادلة برنولي، نقسم على y^3 فنجد:

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2x\,y^{-2} = x \cdot e^{-x^2}$$

لنفرض أن $z = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$ فيكون:

$$\frac{dz}{dx} = -2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

لنضرب ب (-2) ونعوض عن y بدلالة z:

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = -2x\,e^{-x^2}$$

وهي معادلة خطية بالنسبة للمجهول z: $\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = Q(x)$

$$\Rightarrow e^{x^2} \cdot y^{-2} = \frac{1}{3} + c \cdot e^{3x^2}$$

--- « انتهت المحاضرة » ---